

Csonkakúp osztása

Az interneten fellelt [1] műben találkoztunk egy középiskolásoknak szánt feladattal. Most ennek egy általánosabb esetéről lesz szó.

A feladat

Egy csonkakúpot kell kettéosztani egy az alap - és fedőlappal párhuzamos síkkal. Határozzuk meg ezen osztósíknak az alapsík feletti azon h magasságát, mellyel az alsó rész térfogata n - ed része lesz a teljes térfogatnak!

Adatok:

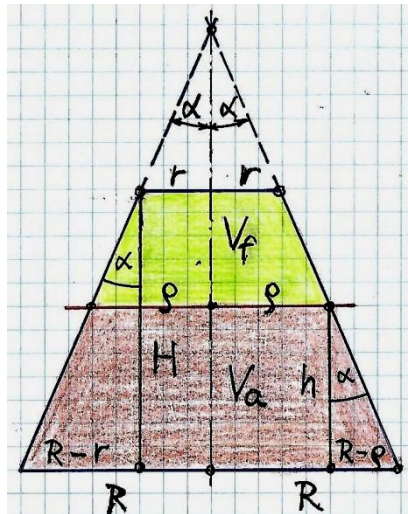
~ a csonkakúp magassága H ;

~ az alapkör sugara R ;

~ a fedőkör sugara r .

A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Eszerint írhatjuk, hogy:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R-r}{H} = \frac{R-\rho}{h} \rightarrow \underline{h = \frac{H}{R-r} \cdot (R - \rho)} . \quad (1)$$

Az egész csonkakúp térfogata:

$$V = \frac{\pi}{3} \cdot H \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) . \quad (2)$$

Az alsó csónkakúp térfogata:

$$V_a = \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) . \quad (3)$$

A feladat feltétele szerint:

$$V_a = \frac{V}{n} . \quad (4)$$

Most (2), (3), (4) - gyel:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{3} \cdot h \cdot (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{3} \cdot H \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) \rightarrow \\ h \cdot (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) &= \frac{1}{n} \cdot H \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) . \end{aligned} \quad (5)$$

Majd (1) és (5) - tel:

$$\begin{aligned} \frac{H}{R-r} \cdot (R - \rho) \cdot (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) &= \frac{1}{n} \cdot H \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) \rightarrow \\ \frac{1}{R-r} \cdot (R - \rho) \cdot (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) &= \frac{1}{n} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) \rightarrow \\ (R - \rho) \cdot (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) &= \frac{R-r}{n} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) . \end{aligned} \quad (6)$$

A (6) egyenlet bal és jobb oldalával:

$$B = J ; \quad (7/1)$$

$$B = (R - \rho) \cdot (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) , \quad (7/2)$$

$$J = \frac{R-r}{n} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) . \quad (7/3)$$

Most részletszámításokkal:

$$\begin{aligned} B &= (R - \rho) \cdot (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2) = R^3 - \rho \cdot R^2 + R^2 \cdot \rho - R \cdot \rho^2 + R \cdot \rho^2 - \rho^3 \rightarrow \\ B &= R^3 - \rho^3 ; \end{aligned} \quad (8/1)$$

majd:

$$\begin{aligned} J &= \frac{R-r}{n} \cdot (R^2 + R \cdot r + r^2) = \frac{1}{n} \cdot (R^3 - r \cdot R^2 + R^2 \cdot r - R \cdot r^2 + R \cdot r^2 - r^3) = \\ J &= \frac{1}{n} \cdot (R^3 - r^3) . \end{aligned} \quad (8/2)$$

Ezután (7) és (8) szerint:

$$\begin{aligned} R^3 - \rho^3 &= \frac{1}{n} \cdot (R^3 - r^3) \rightarrow R^3 - \rho^3 = \frac{1}{n} \cdot R^3 - \frac{1}{n} \cdot r^3 \rightarrow R^3 - \frac{1}{n} \cdot R^3 + \frac{1}{n} \cdot r^3 = \rho^3 \rightarrow \\ \rho^3 &= R^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot r^3 = \frac{n-1}{n} \cdot R^3 + \frac{1}{n} \cdot r^3 = \frac{(n-1) \cdot R^3 + r^3}{n} \rightarrow \end{aligned}$$

$$\rho(n) = \sqrt[3]{\frac{(n-1) \cdot R^3 + r^3}{n}}. \quad (9)$$

Végül (1) és (9) - cel:

$$h(n) = \frac{H}{R-r} \cdot \left(R - \sqrt[3]{\frac{(n-1) \cdot R^3 + r^3}{n}} \right). \quad (10)$$

Egy speciális eset:

$$h(n = 2) = \frac{H}{R-r} \cdot \left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}} \right). \quad (11)$$

A (11) eredmény megegyezik az [1] - bélivel.

Megjegyzések:

M1. Az elején említett feladat kiírása, valamint közölt eredménye a 2. ábrán látható.

84. Высота усечённого конуса H , радиусы оснований R и r . Плоскость, параллельная основанию, делит объём конуса на две равные части. Определить расстояние этой плоскости от нижнего основания конуса. *Омв.* $\frac{H}{R-r} \left(R - \sqrt[3]{\frac{R^3 + r^3}{2}} \right).$

2. ábra: forrása: [1]

M2. A középiskolai tanulmányokból, esetleg [2] -ből a csonkakúp térfogat - képlete (2) szerinti, ha az 1. ábra jelöléseit alkalmazzuk a [2] - ben talált képletre.

Ezért is fontos egy vázlatrajz készítése, ahol egyeztetni tudjuk a talált képletbeli jelöléseket a sajátunkkal. Egyébként itt a jó alkalom a (2) képlet önálló levezetésére.

M3. A most 74 éve, a 2. VH vége után 3 évvel kiadott könyv középiskolásoknak, illetve tanáraiknak szánt feladatokat tartalmaz. Az itt feldolgozott feladat nekünk újszerű volt. Meglehet, nem megy minden középiskolásnak – esetleg a tanárpótlónak sem –, legfeljebb csak segítséggel. Viszont jócskán tartalmaz megszívlelendő dolgokat. Ezért is foglalkoztunk itt vele. Egy hozzáértő tanár ezekre gondosan felhívja a tanulók figyelmét. Ilyen pl. az a tény is, hogy olyan mennyiségekkel is foglalkoztunk, amiket ez a feladat nem kért. Ilyen pl. a (9) képlet szerinti is. Utóbbi az [1] könyv egy másik feladata részeredményeként szerepel, ámde köbgyök helyett négyzetgyökkel közölve azt. Ez nyilván sajtóhiba. A 2. ábrán is szereplő képletrészben ezt a hibát már nem követték el.

M4. Ha az alsó rész térfogata: $V_a = V / n$, akkor a felső rész térfogata:

$$V_f = V - V_a = V \cdot \left(1 - \frac{V_a}{V}\right) = V \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = V \cdot \frac{n-1}{n} . \quad (12)$$

Források:

[1] – **N. A. Glagoljev**: Elementarnaja geometrija, Cszty 2., Sztyereometrija
Ucspedgiz, Moszkva, 1948.

[2] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev**: Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnöktanár

Szödliget, 2022. 07. 03.

Továbbiak: <https://galgoczi.net/>